

Δ3. Πριν την αναπήδηση, το ελατήριο είχε αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια

$$U = \frac{1}{2}k \cdot \Delta\ell^2, \quad (2)$$

Στη θέση ισορροπίας των $\Sigma_1 - \Sigma_2$ ισχύει $(m_1 + m_2)g = k \cdot \Delta\ell$, (3)

Από τις (2), (3) παίρνουμε: $\Delta\ell = 0,15\text{m}$ και $k = 200\text{ N/m}$.

Δ4. Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για το Σ_2 από την αρχική θέση ισορροπίας μέχρι τη θέση (Γ) όπου σταματά στιγμιαία.

$$0 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = m_2 g d + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell + d)^2 \Rightarrow d = 0,2\text{m}$$

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $U_{\max} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell + d)^2 = 12,25\text{J}$

Δ5. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου όταν αυτός περάσει για πρώτη φορά από τη θέση (Δ) που είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_\Delta = -m_2 g \cdot v_\Delta, \quad (4)$$

Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για το Σ_2 από την θέση (Γ) μέχρι τη θέση (Δ).

$$\frac{1}{2}m_2 v_\Delta^2 - 0 = -m_2 g(\Delta\ell + d) + \frac{1}{2}k(\Delta\ell + d)^2 \Rightarrow v_\Delta^2 = 5,25 \Rightarrow v_\Delta = 2,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4) παίρνουμε $\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_\Delta = -46 \frac{\text{J}}{\text{s}}$

Λύσεις κριτηρίου 4

ΘΕΜΑ Α

A1. (α) A2. (δ) A3. (γ) A4. (γ) A5. α Σ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. (i)

Για το σημείο Ε που είναι σημείο του καρουλιού έχουμε:

$$\vec{\alpha}_E = \vec{\alpha}_{\text{cm}} + \vec{\alpha}_{\gamma\text{p}} \Rightarrow \alpha_E = \alpha_{\text{cm}} - \alpha_{\gamma\text{ov}} r, \quad (1)$$

Για το καρούλι ισχύει: $\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\text{ov}} R$, (2)

Συνδυάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε:

Λύσεις κριτηρίων αξιολόγησης

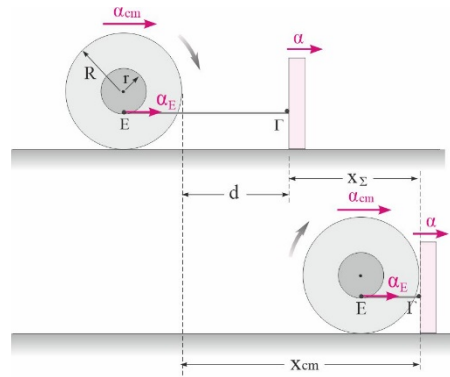
$$\alpha_E = \alpha_{cm} - \frac{\alpha_{cm}}{R} r \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{3}{2} \alpha$$

Όταν το καρούλι φτάσει στο σώμα θα έχει διανύσει x_{cm} και το σώμα Σ διάστημα x_Σ .

$$x_{cm} = d + x_\Sigma \Rightarrow \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2 = d + \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{3}{2} \alpha t^2 = d + \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha t^2}{4} = d \Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{d}{\alpha}}$$



B2. (ii)

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στη ράβδο ΑΓ.

Η F_Γ είναι κάθετη στον λείο κατακόρυφο τοίχο.

Η F_Δ είναι κάθετη στη ράβδο αφού αυτή ακουμπά στην κορυφή Δ.

Το βάρος της w είναι κατακόρυφο και περνά από το κέντρο μάζας της.

Βρίσκουμε τις ροπές ως προς το σημείο Γ:

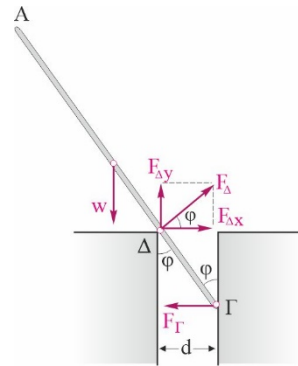
$$\Sigma \tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow w \cdot \frac{L}{2} \eta \mu \varphi - F_\Delta (\Gamma \Delta) = 0, \quad (1)$$

Από την ισορροπία στον άξονα γ:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow w = F_{\Delta y} = F_\Delta \eta \mu \varphi, \quad (2)$$

$$\text{Συνδυάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε: } w \cdot \frac{L}{2} \eta \mu \varphi - \frac{w}{\eta \mu \varphi} (\Gamma \Delta) \Rightarrow w \cdot \frac{L}{2} \frac{1}{2} - \frac{w}{0,5} (\Gamma \Delta) \Rightarrow (\Gamma \Delta) = \frac{L}{8}$$

$$\text{Από τη γεωμετρία του σχήματος έχουμε: } d = (\Gamma \Delta) \eta \mu \varphi = \frac{L}{8} \frac{1}{2} \Rightarrow d = \frac{L}{16}$$



B3. (ii)

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στη σφαίρα.

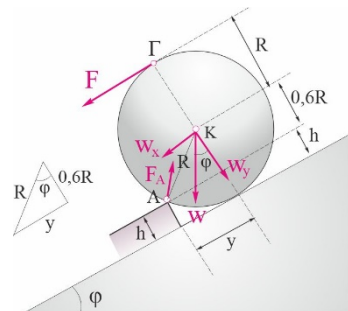
Η F_A ασκείται σε τυχαία διεύθυνση από την κορυφή Α.

Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες

$$w_x = w \eta \mu \varphi = 0,6w \text{ και } w_y = w \sigma \upsilon \nu \varphi = 0,8w.$$

Επειδή η σφαίρα μόλις θα υπερπηδήσει το εμπόδιο, δεν ακουμπά στο επίπεδο αλλά μόνον στο Α.

Βρίσκουμε τις ροπές ως προς το σημείο Α:



$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F \cdot 1,6R + w_1 \mu R - w_2 \sin \varphi \cdot y = 0, \quad (1)$$

$$\text{Από τη γεωμετρία του σχήματος} \quad y = \sqrt{R^2 - (0,6R)^2} \Rightarrow y = 0,8R$$

Η σχέση (1) γίνεται:

$$F \cdot 1,6R + 0,6w \cdot 0,6R = 0,8w \cdot 0,8R \Rightarrow 1,6F = 0,28w \Rightarrow F = \frac{7}{40}w$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στη ράβδο και παίρνουμε ροπές ως προς το (A).

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F_B \frac{3L}{4} - w_1 \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow F_B = 20N$$

Γ2. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στην τροχαλία και παίρνουμε ροπές ως προς το κέντρο (K).

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow -w_2 \cdot R_1 + T'_{\sigma\tau} \cdot R_2 = 0 \Rightarrow T'_{\sigma\tau} = 5N$$

$$T_{op} = T_{\sigma\tau} = \mu \cdot F_B \Rightarrow \mu = \frac{T_{\sigma\tau}}{F_B} = \frac{5N}{20N} = 0,25$$

Γ3. Σχεδιάζουμε στη ράβδο τη νέα δύναμη F_Γ και παίρνουμε ροπές ως προς το (A) και ροπές ως προς το κέντρο (K) της τροχαλίας.

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F_{IB} \frac{3L}{4} - w_1 \frac{L}{2} - F_\Gamma \cdot L = 0 \Rightarrow$$

$$F_{IB} = 32N$$

$$T_{I\sigma\tau} = T_{Iop} = \mu \cdot F_{IB} \Rightarrow T_{I\sigma\tau} = 8N$$

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow -w_3 \cdot R_1 + T'_{I\sigma\tau} \cdot R_2 = 0 \Rightarrow$$

$$w_3 = 16N \Rightarrow m_3 = 1,6kg$$

Γ4. Η δύναμη F_{1A} που ασκείται από την άρθρωση στην ράβδο θα υπολογιστεί από την ισορροπία της ράβδου στον x και στον y άξονα.

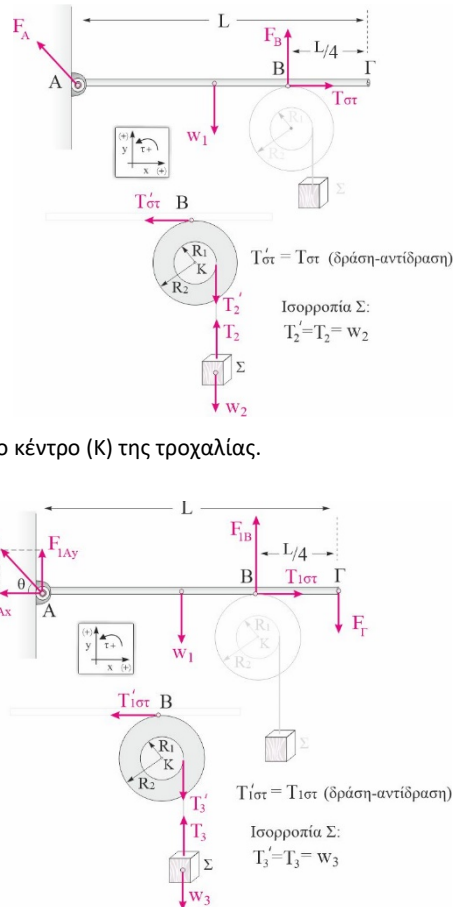
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{I\sigma\tau} - F_{A1x} = 0 \Rightarrow F_{A1x} = 8N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{A1y} - w_1 + F_{IB} - F_\Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$F_{A1y} = 7N$$

$$F_{1A} = \sqrt{F_{A1x}^2 + F_{A1y}^2} = \sqrt{113}N, \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{F_{A1y}}{F_{A1x}} = \frac{7}{8}$$

Γ5. Όταν θα αντικαταστήσουμε το Σ_3 με άλλο Σ_4 μεγαλύτερης μάζας, αυτό θα κατέρχεται επιταχυνόμενο και η τροχαλία θα περιστρέφεται. Η παραγόμενη θερμότητα θα ισούται με το απόλυτο



Λύσεις κριτηρίων αξιολόγησης

του έργου της τριβής ολίσθησης. Όταν το Σ_4 κατέλθει κατά 1m, ένα σημείο στην εξωτερική περιφέρεια της τροχαλίας θα διανύσει τόξο ίσο με 2m, γιατί η ακτίνα του εξωτερικού δίσκου είναι διπλάσια αυτής του εσωτερικού που είναι τυλιγμένο το σχοινί που είναι δεμένο το Σ_4 .

Το έργο της τριβής ολίσθησης είναι

$$W_T = -T_{ολ} \cdot x = -\mu \cdot F_{IB} \cdot x = -0,25 \cdot 32N \cdot 2J \Rightarrow W_T = -16J$$

Άρα η εκλυόμενη θερμότητα είναι 16 J.

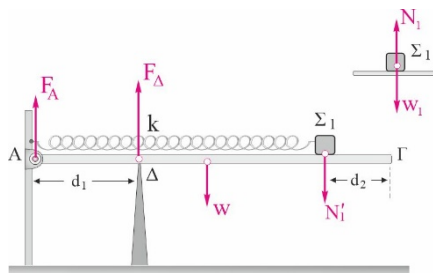
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στη ράβδο και παίρνουμε ροπές ως προς την άρθρωση (Α).

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F_A \cdot d_1 - w \frac{L}{2} - N'_1 \cdot (L - d_2) = 0 \Rightarrow$$

$$N'_1 = 10N$$

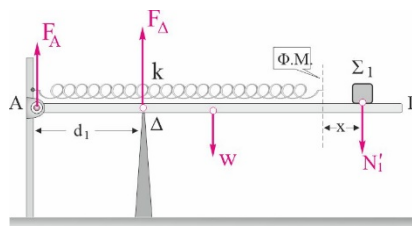
Η N'_1 είναι η δύναμη που ασκεί το Σ_1 στη ράβδο και επειδή αυτό ισορροπεί ισούται με το βάρος του σώματος, άρα $w_1=10N$ και $m_1=1kg$.



Δ2. Τοποθετούμε το Σ_1 σε μια τυχαία θέση x από τη θέση ισορροπίας του που είναι και η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και παίρνουμε ροπές ως προς την άρθρωση (Α).

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F_A \cdot d_1 - w \frac{L}{2} - N'_1 \cdot (L - d_2 + x) = 0 \Rightarrow$$

$$F_A = 55 + 25x \text{ (S.I.)} \quad (1)$$

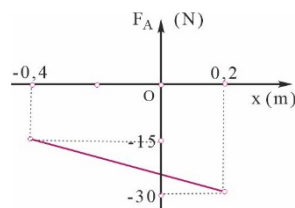


Από την ισορροπία στον άξονα y έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_A + F_{\Delta} = w + w_1 \Rightarrow F_A = -25 - 25x \text{ (S.I.)} \quad \text{για } -0,4m \leq x \leq 0,2m$$

Άρα, η δύναμη από την άρθρωση έχει αντίθετη φορά από αυτή που σχεδιάσαμε στο σχήμα.

Η γραφική παράσταση $F_A=f(x)$ δίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



Δ3. Για να βρούμε την ταχύτητα του Σ_1 λίγο πριν την κρούση εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από την αρχική θέση εκτροπής ($x_{αρχ}=-0,4m$) μέχρι την άκρη Γ ($x_f=0,2m$).

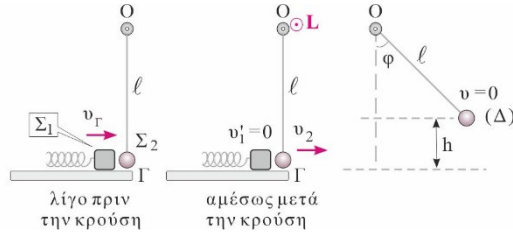
$$K_{\Gamma} - 0 = W_{\text{Fe}\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_{\Gamma}^2 - 0 = \frac{1}{2} k x_{\text{αρχ}}^2 - \frac{1}{2} k x_{\Gamma}^2 \Rightarrow$$

$$v_{\Gamma} = 2\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

Επειδή τα σώματα έχουν ίδιες μάζες, ανταλλάσσουν ταχύτητες, έτσι

$$v_2 = 2\sqrt{3} \frac{m}{s}$$



και το μέτρο της στροφορμής του σφαιριδίου αμέσως μετά την κρούσης ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το Ο είναι

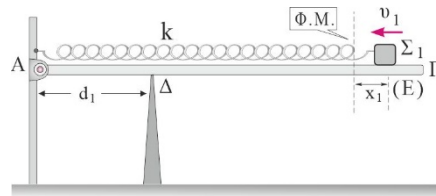
$$L_2 = m_2 v_2 \ell = 1,2\sqrt{3} \text{ kg} \frac{m^2}{s}$$

Δ4. Για να βρούμε τη μέγιστη γωνία φ, εφαρμόζουμε για το σφαιρίδιο το ΘΜΚΕ μεταξύ του άκρου Γ της ράβδου και του σημείου (Δ) που θα φτάσει το σφαιρίδιο.

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_w + W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_2^2 = -mgh \Rightarrow h = \frac{v_2^2}{2g} = 0,6m$$

Επειδή $h=\ell$, το σφαιρίδιο θα φτάσει μέχρι τη θέση που το νήμα θα γίνει οριζόντιο, άρα $\phi=90^\circ$.

Δ5. Το σώμα Σ1 αμέσως μετά την κρούση ξεκινά με ταχύτητα μηδέν (ανταλλαγή ταχυτήτων). Για να βρούμε το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σημείο Δ, τη χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια του σώματος Σ1 είναι δεκαπενταπλάσια της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, θα πρέπει να βρούμε σε ποια θέση (Ε) που απέχει x_1 από το Φ.Μ. του ελατηρίου συμβαίνει αυτό.



Εφαρμόζουμε για το Σ1 το ΘΜΚΕ μεταξύ του άκρου Γ της ράβδου και του σημείου (Ε).

$$K_E - K_{\Gamma} = W_{\text{Fe}\lambda} \Rightarrow 15 U_{\text{E}\lambda} - 0 = \frac{1}{2} k d_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 \Rightarrow$$

$$15 \frac{1}{2} k x_1^2 - 0 = \frac{1}{2} k d_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 \Rightarrow x_1 = \pm 0,05m$$

Αυτό συμβαίνει σε δύο θέσεις που ισαπέχουν 0,05m δεξιά και αριστερά του Φ.Μ. του ελατηρίου.

Η δύναμη στήριξης στο Δ σύμφωνα με τη σχέση (1) του Δ1 ερωτήματος είναι

$$F_{\Delta 1} = 55 + 25 \cdot 0,05, \text{ (S.I.)} \Rightarrow F_{\Delta 1} = 56,25N$$